О. С. Олексюк,* П. І. Штабалюк**

МОДЕЛЬ ВИБОРУ АЛЬТЕРНАТИВИ ПРИ ВІДОМІЙ РІЗНИЦІ МІЖ ІМОВІРНОСТЯМИ НАСТАННЯ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ СИТУАЦІЙ

Задача вибору однієї з кількох альтернатив, серед яких відсутня домінантна, тобто краща за решту за будь-яких умов, не нова, проте і досі залишається далекою від вирішення, як у теоретичному, так і в практичному плані. Досить, наприклад, згадати, який підвищений інтерес влітку 2006 року викликав в Україні й закордоном процес прийняття рішення президентом держави, коли саме рішення полягало у виборі однієї з лише двох альтернатив: а) або розпустити парламент; б) або дати парламентові можливість сформувати уряд.

Якби теорія вибору альтернативних варіантів рішень була завершеною, чи була близькою до завершення, то для особи, що приймає рішення (ОПР), практика прийняття рішення в цьому випадку чи в багатьох інших була би набагато простішою. Однак теорія прийняття рішень попри більш, ніж столітній шлях свого розвитку і досі має багато невирішених питань і довго ще залишатиметься актуальною.

Складність задачі вибору альтернативних варіантів рішень полягає в її спрямованості у майбутнє, якому притаманні ризик та невизначеність. Інформацію про них буває складно, а то й неможливо отримати, особливо в кількісному вигляді.

Найкращою в інформаційному плані для особи, що приймає рішення, вважають задачу вибору, в якій відомі точні значення ймовірностей настання кожної з можливих в майбутньому ситуацій

У таких випадках найчастіше користуються критерієм математичного сподівання.

Для випадків, коли інформація про ймовірність настання тих чи інших ситуацій відсутня, також розроблено низку критеріїв, зокрема критерій середнього арифметичного, Вальда, Севіджа тощо[1]. Проте на практиці такі крайні випадки чи то повної інформованості, чи повної відсутності інформації щодо ймовірностей настання в майбутньому певних ситуацій, трапляються відносно нечасто, адже при відповідному раціональному, не інтуїтивному підході до проблеми вибору завжди збирається додаткова інформація в будь-якому вигляді, на основі якої можна отримати найбільш обґрунтовані оцінки ймовірностей.

Відомо, наприклад, як за допомогою принципу Джейнса-Гібса можна оцінити ймовірності, якщо відоме обмеження зверху на математичне сподівання наслідку прийняття однієї з альтернати[2].

Проте залишається недослідженим, відкритим питання у випадку наявності інформації про різницю між невідомими ймовірностями окремих ситуацій.

Задача вибору альтернативного варіанту рішення досліджувалася в працях як зарубіжних, так і українських науковців[3] .

* *завідувач кафедри фінансів Хмельницького економічного університету, доктор економічних наук, професор*
** *доцент кафедри фінансів Хмельницького економічного університету, кандидат фізико-математичних наук*

[1] *Кини Р. Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. — М.: Радио и связь, 1981. — 560 с.; *Моррис У. Т.* Наука об управлении: Байесовский подход. — М.: Мир, 1971. — 304 с.; *Ястремський О. І.* Моделювання економічного ризику. — К.: Либідь, 1992. — 176 с.

[2] *Трухаев Р. И.* Модели принятия решений в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1981. — 258 с.; *Юдин Д. Б.* Математические методы управления в условиях неполной информации. — М.: Сов. радио, 1974. — 400 с.

[3] *Ансофф И.* Стратегическое управление. — М.: Экономика, 1989 — 519 с.; *Баззел Р., Кокс Д., Браун Р.* Информация и риск в маркетинге / Пер. с анг. — М.: Финстатинформ, 1993. — 96 с.; *Вентцель Е. С.* Исследования операций: задачи, принципы, методология. — М.: Наука, 1980. — 208 с.; *Вітлінський В. В.* Аналіз, оцінка і моделювання економічного ризику. — К.: ДЕМІУР, 1996. — 212 с.; *Вітлінський В. В.* Економічний ризик: системний аналіз, менеджмент. — К., 1994. — 245 с. — Деп. у КДЕУ 17.10.94. № 2035-Ук94;

Університетські наукові записки, 2006, № 3-4 (19-20), с. 491-496. www.univer.km.ua

Метою статті є отримання обґрунтовані оцінки ймовірностей настання ситуацій на основі принципу мінімуму ентропії при наявності інформації про різницю між ймовірностями настання певних ситуацій, що давало би можливість приймати науково обґрунтовані управлінські рішення.

Нехай потрібно вибрати один із m $(m \geq 2)$ альтернативних варіантів рішень у випадку, коли може реалізуватися одна з n $(n \geq 2)$ ситуацій, ймовірності настання яких $\rho_1, \ldots, \rho_n$ невідомі. Припустимо, що відома інформація про різницю між ймовірностями настання другої та першої ситуацій:

$$\rho_2 - \rho_1 = a. \quad (1)$$

не зменшуючи загальності, вважаємо, що

$$a > 0, \qquad (2)$$

оскільки в протилежному випадку номери ситуацій можна поміняти між собою місцями.

З очевидних умов, які повинні задовольнити ймовірності $\rho_1 > 0$ *і* $\rho_2 < 1$, випливає додаткове обмеження на величину a:

$$a < 1, \qquad (3)$$

У випадку $n=2$ умова (1) разом з умовою повноти групи подій

$$\rho_1 + \rho_2 = 1 \ (4)$$

дає можливість точного визначення ймовірностей ρ_1 та ρ_2, для чого достатньо розв'язати систему рівняння (1) та (4):

$$\begin{cases} p_2 - p_1 = a \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2p_2 = a + 1, \Rightarrow$$

$$p_2 = \frac{a+1}{2}; p_1 = \frac{1-a}{2}. \quad (5)$$

Розглянемо випадок $n=3$. Тепер умов є дві: рівність 1 та рівність $\rho_1+\rho_2+\rho_3=1$, (6) а невідомих ймовірностей три, тобто умов (1) та (6) для однозначного обчислення ймовірностей ρ_1, ρ_2 та ρ_3 в цьому випадку недостатньо.

У таких випадках рекомендується застосовувати принцип максимуму інформаційної ентропії, яка обчислюється за формулою Шеннона:

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i. \quad (7)$$

Виразимо з рівності (1) ймовірність ρ_2 через ρ_1:

$$\rho_2 = \rho_1 + a \quad (8)$$

та ймовірність ρ_3 з рівності (6) через ρ_1 та ρ_2.

$$\rho_3 = 1 - \rho_1 - \rho_2 \ (9)$$

Формулу (9) з урахуванням рівності (8) запишемо у вигляді залежності лише від ймовірності ρ_1:

$$\rho_3 = 1 - 2\rho_1 - a \ (10)$$

Вітлінський В. В., Наконечний С. І. Економічний ризик і проблеми його моделювання. — К., 1993. — 8 с. — Деп. у КДЕУ 20.12.93, № 2499-Ук93; *Кини Р. Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. — М.: Радио и связь, 1981. — 560 с.; *Моррис У. Т.* Наука об управлении: Байесовский подход. — М.: Мир, 1971. — 304 с.; *Олексюк О. С.* Моделювання прийняття ризикованих фінансових рішень / Наукове видання. — К.: Вища школа, 1998. — 312 с.; *Олексюк О. С.* Системи підтримки прийняття фінансових рішень на мікрорівні / Наукове видання. — К.: Наукова думка, 1998. — 507 с.; *Первозванский А. А.* Математические модели в управлении производством. — М.: Наука, 1975. — 616 с.; *Райфа Г.* Анализ решений. — М.: Наука, 1977. — 408 с.; *Трухаев Р. И.* Модели принятия решений в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1981. — 258 с.; *Хеннекен П. Л. Тортра А.* Теория вероятностей и некоторые ее приложения / Пер. с франц. — М.: Наука, 1974. — 472 с.; *Шибалкин О.Ю.* Проблемы и методы построения сценариев социально-экономического развития. — М.: Наука, 1992. — 176 с.; *Юдин Д. Б.* Математические методы управления в условиях неполной информации. — М.: Сов. радио, 1974. — 400 с.; *Ястремський О. І.* Моделювання економічного ризику. — К.: Либідь, 1992. — 176 с.

Підставимо вирази (8) та (10) у функцію (7) при $n=3$:

$$H=-\rho_1 ln\rho_1-(\rho_1+a)\,ln(\rho_1+a)-(1-2\rho_1-a)\,ln(1-2\rho_1-a)\,. \quad (11)$$

Щоб дослідити функцію (11) на мінімум, знайдемо її похідну за ρ_1:

$$H^1_{\rho 1}=-ln\rho_1-ln(\rho_1+a)+2ln(1-2\rho_1-a)\,; \quad (12)$$

прирівняємо до нуля:

$$2ln(1-2\rho_1-a)-ln\rho_1-ln(\rho_1+a)=0; \quad (13)$$

і розв'яжемо отримане рівняння (13), яке зводиться до квадратного:

$$(1-2p_1-a)^2=p_1(p_1+a)\Rightarrow$$

$$3p_1^2+p_1(3a-4)+(a-1)^2=0. \quad (14)$$

Дискримінант рівняння (14) за умов (2) та (3) додатний:

$$D=4-3a^2>0,$$

а тому рівняння (14) має два дійсні корені:

$$p_{11}=\frac{4-3a-\sqrt{4-3a^2}}{6} \quad (15)$$

та

$$p_{12}=\frac{4-3a+\sqrt{4-3a^2}}{6} \quad (16)$$

Обидва корені (15) і (16) задовольняють обмеження на ймовірність $0<\rho_1<1$, однак при підстановці кореня (16) у рівність (8)

$$p_2=\frac{4-3a+\sqrt{4-3a^2}}{6}+a \quad (17)$$

з'ясовується, що вираз (17) перевищує одиницю

$$\frac{4+3a+\sqrt{4-3a^2}}{6}>1,$$

і, отже, корінь (16) з подальшого розгляду необхідно вилучити.

Щоб перевірити, що корінь (15) надає мірі ентропії (11) мінімального значення, обчислимо її похідну другого порядку:

$$H''=-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_1+a}-\frac{4}{1-2p_1-a}. \quad (18)$$

з формули (18) випливає, що похідна другого порядку від'ємна,

$$-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_1+a}-\frac{4}{1-2p_1-a}<0,$$

а це і є підтвердженням того, що розв'язок (15) надає функції H максимального значення.

Маючи оцінку ймовірності настання першої ситуації, на основі формули (8) обчислимо ймовірність ρ_2:

$$p_2=\frac{4+3a-\sqrt{4-3a^2}}{6}, \quad (19)$$

а на основі формули (10) ймовірність ρ_3:

$$p_3=1-\frac{4-\sqrt{4-3a^2}}{3}=\frac{\sqrt{4-3a^2}-1}{3}. \quad (20)$$

Університетські наукові записки, 2006, № 3-4 (19-20), с. 491-496. www.univer.km.ua

Узагальнимо тепер отриманий результат на випадок довільної кількості можливих ситуацій $n>3$. Функція (7) тепер із урахуванням рівності

$$p_n = 1 - 2p_1 - a - \sum_{i=3}^{n-1} p_i \quad (21)$$

набирає вигляду

$$H = -p_1 \ln p_1 - (p_1 + a)\ln(p_1 + a) - \sum_{i=3}^{n-1} p_i \ln p_i - (1 - 2p_1 - a - \sum_{i=3}^{n-1} p_i)\ln(1 - 2p_1 - a - \sum_{i=3}^{n-1} p_i) \quad (22)$$

Функція (22), на відміну від функції (11), має більше, ніж один аргумент. Тому для дослідження її на мінімум потрібно обчислити частинні похідні першого порядку за кожним з аргументів:

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = -\ln p_1 - \ln(p_1 + a) + 2\ln(1 - 2p_1 - a - \sum_{i-3}^{n-1} p_i);$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_3} = -\ln p_3 + \ln(1 - 2p_1 - a - \sum_{i-3}^{n-1} p_i);$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_4} = -\ln p_4 + \ln(1 - 2p_1 - a - \sum_{i-3}^{n-1} p_i);$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_{n-1}} = -\ln p_{n-1} + \ln(1 - 2p_1 - a - \sum_{i-3}^{n-1} p_i); \quad (24)$$

Прирівняємо кожну з отриманих частинних похідних (24) до нуля і об'єднаємо їх у систему з $(n-2)$ рівнянь:

$$\begin{cases} -\ln p_1 - \ln(p_1 + a) + 2\ln(1 - 2p_1 - a - \sum_{i-3}^{n-1} p_i) = 0 \\ -\ln p_3 + \ln(1 - 2p_1 - a - \sum_{i-3}^{n-1} p_i) = 0 \\ -\ln p_4 + \ln(1 - 2p_1 - a - \sum_{i-3}^{n-1} p_i) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\ln p_{n-1} + \ln(1 - 2p_1 - a - \sum_{i-3}^{n-1} p_i) = 0 \end{cases} \quad (25)$$

З рівнянь системи (25), починаючи з другого, випливає, що ймовірності ρ_3, ρ_4, ..., ρ_{n-1} рівні між собою:

$$\rho_3 = \rho_4 = \ldots = \rho_{n-1}. \quad (26)$$

Для зручності подальшого викладу введемо позначення

$$\rho_3 = \rho_4 = \ldots = \rho_{n-1} = q. \quad (27)$$

З урахування позначення (27) рівняння системи (25, починаючи з другого, набирають однакового вигляду:

$$-\ln q + \ln(1 - 2p_1 - a - (n-3)q) = 0. \quad (28)$$

Підставивши позначення (27) у перше рівняння системи (25) отримаємо:

$$2\ln(1 - 2p_1 - a - (n-3)q) - \ln(p_1(p_1 + a)) = 0. \quad (29)$$

З рівняння (28) виразимо q через ρ_1

$$q = (1 - 2\rho_1 - a)(n-2). \quad (30)$$

www.univer.km.ua Університетські наукові записки, 2006, № 3-4 (19-20), с. 491-496.

Підставимо вираз (30) у рівняння (29) і після деякого спрощення отримаємо рівняння

$$(1-2p_1-a-(n-3)(1-2p_1-a)(n-2))^2 = p_1^2+p_1a,$$

яке зводиться до наступного:

$$(2p_1-(1-a))^2 = (n-2)^2(p_1^2+p_1a). \quad (31)$$

При n=4 рівняння (31) набирає найпростішого лінійного вигляду:

$$4p_1 = (1-a)^2, \quad (32)$$

звідки знаходимо:

$$p_1 = \frac{(1-a)^2}{4}. \quad (33)$$

На основі рівностей (33) та (8) обчислюємо ρ_2:

$$p_2 = \frac{(1+a)^2}{4}. \quad (34)$$

З нерівностей (27), (30) та (33) знайдемо ρ_3:

$$p_3 = \frac{1-a^2}{4}. \quad (35)$$

Підставивши (33) та (35) у рівність (21) при n=4, переконуємось, що ймовірність ρ_4 набуває такого ж значення, що і ρ_3:

$$p_4 = \frac{1-a^2}{4}. \quad (36)$$

Перш ніж продовжити дослідження рівняння (31) при $n>4$, розглянемо модельний приклад застосування результату, отриманого у випадку $n=4$.

Припустимо, що особі, котра приймає рішення, потрібно вибрати один із двох альтернативних варіантів рішень B_1 чи B_2, якщо можливе настання однієї з чотирьох ситуацій з відомими для кожного з цих випадків наслідками, які для зручності розгляду зібрано у таблиці 1:

Таблиця 1.

Ситуації / Варіанти рішень	C_1	C_2	C_3	C_4
B_1	100	200	120	150
B_2	120	170	150	140

При застосуванні критерію середнього арифметичного кращим виявляється варіант рішення B_2, оскільки

$$S_2 = \frac{120+170+150+140}{4} > S_1 = \frac{100+200+120+150}{4}.$$

Припустимо, що крім даних, наведених у табл. 1, відомо, що ймовірність настання ситуації C_2 на 0,2 перевищує ймовірність настання ситуації C_1 і

$$\rho_2=\rho_1+0{,}2. \quad (37)$$

При наявності інформації у вигляді рівності (37) застосовувати критерій середнього арифметичного не зовсім доречно, оскільки цей критерій застосовують за припущення, що всі можливі ситуації рівноймовірні.

Проте наявність інформації (37) не перешкоджає застосуванню критерію Вальда. Застосовуючи максимінний підхід цього критерію, переконуємося, що і за цим критерієм варіант

Університетські наукові записки, 2006, № 3-4 (19-20), с. 491-496. www.univer.km.ua

рішення B_2 пріоритетніший, оскільки найменше зі значень другого рядка табл.1 120 перевищує найменше зі значень першого рядка цієї таблиці, тобто 100.

У випадку вибору варіанту з інвестиційних рішень рекомендують застосовувати критерії Севіджа. Для його застосування потрібно спочатку побудувати відповідну до табл. 1 таблицю можливих втрат, віднімаючи елементи в стовпчики цієї таблиці від найбільшого значення з відповідного стовпчика (табл. 2)

Таблиця 2.

Ситуації / Варіанти рішень	C_1 –	C_2 –	C_3 –	C_4 –
B_1	20	0	30	0
B_2	0	30	0	10

Наступний крок застосування критерію Севіджа полягає в знаходженні найбільшого значення в кожному рядку таблиці 2 і виборі того рядка, в якому знаходиться найменше зі знайдених максимальних значень. У даному випадку найбільші значення обох рядків табл. 2 однакові, по 30 у. о., отже, застосування критерію Севіджа не дає відповіді про пріоритетність того чи іншого варіанту рішення.

Наявність інформації у вигляді рівності (37) дає можливість отримати оцінки ймовірностей настання майбутніх ситуацій на основі формул (33) — (36):

$$p_1 = 0{,}16;\ p_2 = 0{,}36;\ p_3 = p_4 = 0{,}24,$$

а відтак і оцінкиматематичних сподівань вигод кожного з варіантів рішень таблиці 1:

$$M_1 = 0{,}16 \cdot 100 + 0{,}36 \cdot 200 + 0{,}24 \cdot 120 = 0{,}24 \cdot 150 = 152{,}8,$$
$$M_2 = 0{,}16 \cdot 120 + 0{,}36 \cdot 170 + 0{,}24 \cdot 150 = 0{,}24 \cdot 140 = 150.$$

Як бачимо, $M_1=152{,}8>M_2=150$, що віддає перевагу першому варіантові рішення.

Розглянемо тепер рівняння (31) при $n>4$; яке зводиться до наступного:

$$(n^2 - 4n)p_1^2 + ((n^2 - 4n)a + 4)p_1 - (1-a)^2 = 0. \quad (38)$$

Дискримінант рівняння (38) додатний:

$$D = ((n^2 - 4n)a + 4)^2 + 4(n^2 - 4n)(1-a)^2 > 0, \quad (39)$$

а, отже, рівняння (38), як і рівняння (14) має два дійсні корені. Відмінність рівняння (38) від рівняння (14) полягає в тому, що через від'ємність його вільного члена,

$$-(1-a)^2<0,$$

менший з коренів рівняння від'ємний

$$p_{11} = \frac{-((n^2 - 4n)a + 4) - \sqrt{D}}{2(n^2 - 4n)} < 0,$$

а тому його подальший розгляд позбавлений сенсу.

Більший розв'язок рівняння (38) знаходиться за формулою:

$$p_{12} = \frac{-((n^2 - 4n)a + 4) + \sqrt{D}}{2(n^2 - 4n)}. \quad (40)$$

На основі формули (40) та рівнянь (25), (26) обчислюються решта ймовірностей.

Надалі планується дослідити випадок кількох обмежень на невідомі ймовірності настання в майбутньому певних соціально-економічних ситуацій.

www.univer.km.ua Університетські наукові записки, 2006, № 3-4 (19-20), с. 491-496.